

41 - نفرض العنصرات $d_1, d_2, d_3 \in \text{Der } A$: $\{d_1, [d_2, d_3]\}$

$$[d_1, [d_2, d_3]] + [d_2, [d_3, d_1]] + [d_3, [d_1, d_2]] = 0$$

$$[d_1, [d_2, d_3]] = d_1 [d_2, d_3] - [d_2, d_3] d_1$$

$$= d_1 (d_2 d_3 - d_3 d_2) - (d_2 d_3 - d_3 d_2) d_1$$

$$= d_1 d_2 d_3 - d_1 d_3 d_2 - d_2 d_3 d_1 + d_3 d_2 d_1$$

$$[d_2, [d_3, d_1]] = d_2 [d_3, d_1] - [d_3, d_1] d_2$$

$$= d_2 (d_3 d_1 - d_1 d_3) - (d_3 d_1 - d_1 d_3) d_2$$

$$= d_2 d_3 d_1 - d_2 d_1 d_3 - d_3 d_1 d_2 + d_1 d_3 d_2$$

$$[d_3, [d_1, d_2]] = d_3 [d_1, d_2] - [d_1, d_2] d_3$$

$$= d_3 (d_1 d_2 - d_2 d_1) - (d_1 d_2 - d_2 d_1) d_3$$

$$= d_3 d_1 d_2 - d_3 d_2 d_1 - d_1 d_2 d_3 + d_2 d_1 d_3$$

نفس الشيء

في $\text{Der } A$ حيث

$$4) \forall x, y, z \in A : x \in \text{Aut } A$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

$$[x, [y, z]] = x[y, z] - [y, z]x = x(yz - zy) - (yz - zy)x \\ = xyz - xzy - yzx + zyx$$

$$[y, [z, x]] = y[z, x] - [z, x]y = y(zx - xz) - (zx - xz)y \\ = yzx - yxz - zxy + xzy$$

$$[z, [x, y]] = z[x, y] - [x, y]z = z(xy - yx) - (xy - yx)z \\ = zxy - zyx - xyz + yxz$$

* لقد بينا

ليكن A حركلي فوق حقل R ، سنعيّن دالة اشتقاق

$$d_a: A \rightarrow A \quad \forall a \in A$$

$$\forall x \in A : d_a(x) = [a, x] \quad \text{المعرف بالشكل}$$

تُطَبّق اشتقاق داخلي على A نرمز لمجموعة دالات الاشتقاق الداخلية على A

$$\text{Inn}(A)$$

بنوع الدالة مباشرة

$$\emptyset \neq \text{Inn}(A) \subseteq \text{Der}(A)$$

نريد ان نرى ان ψ هو التماثل بين R و $\text{Der}(A)$:

$$\psi: A \rightarrow \text{Der}(A)$$

$$\forall a \in A: \psi(a) = d_a$$

المبرهنه: التماثل بين R و $\text{Der}(A)$

نسال ان يكون ψ تماثلا

البرهان:

• ان ψ ديفيرنتياله لان $\forall a, b \in A$ و $a = b$

$$\forall x \in A: [a, x] = [b, x]$$

$$d_a x = d_b x$$

$$\Rightarrow d_a = d_b$$

$$\psi(a) = \psi(b)$$

$$\psi(a+b) = d_{a+b}$$

$$\forall a+b \in A: d_{a+b}: A \rightarrow A$$

$$\forall x \in A: d_{a+b}(x) = [a+b, x]$$

$$= [a, x] + [b, x] = d_a x + d_b x = (d_a + d_b)x$$

$$\Rightarrow d_{a+b} = d_a + d_b$$

$$\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$$

! ان ψ تماثل بين R و $\text{Der}(A)$

$$\forall \alpha \in R: \psi(\alpha a) = d_{\alpha a}$$

$$\forall x \in A: d_{\alpha a} x = [\alpha a, x] = \alpha [a, x] = \alpha d_a x = [\alpha d_a x]$$

$$d_{\alpha a} = \alpha d_a$$

$$\psi(\alpha a) = \alpha \psi(a)$$

$$\psi([a, b]) = d_{[a, b]}$$

$$\forall x \in A, \quad d_{[a, b]}^{\text{ad}} x = [[a, b], x] =$$

$$[x, [a, b]] + [a, [b, x]] + [b, [x, a]]$$

$$[[a, b], x] = [a, [b, x]] + [b, [x, a]]$$

$$= [\cancel{[a, a]}, b] + [a, [b, x]]$$

$$= [[a, x], b] + [a, [b, x]]$$

$$= [d_a a, b] + [a, d_b a]$$

$$= d_a(d_b a) - [b, d_a a]$$

$$= d_a d_b a - d_b(d_a a)$$

$$= d_a d_b(x) - d_b d_a(x)$$

$$= (d_a d_b - d_b d_a)(x) = [d_a, d_b](x)$$

$$d_{[a, b]}(x) = [d_a, d_b](x)$$

$$d_{[a, b]} = [d_a, d_b]$$

$$\psi([a, b]) = d_{[a, b]} = [d_a, d_b] = [\psi(a), \psi(b)]$$

الموضوع

لبيك A غير له صوت اللفظة R و B صوت حركاته وغير

1. $(B, +)$ حودول جزئی سے منہ المورول $(A, +)$

$$\forall a, b \in B, [a, b] \in B$$

+ نتوقع التعريف جاكزة ان
لن الجزئية في A

توضیح ہے: لیکن A حیر لی صوف الخلفاء R ، B حیر حیرت فی A ، اطمینان ہے

$$m(B) = \{a; a \in A, d_a(B) \in B\}$$

$$\forall b \in B; [a, b] \in B$$

استیکلہ میں لیں چھڑکتے آ

البرکات

$$0 \in A, \quad d_2(B) \in B, \quad \text{and} \quad \forall n(B) \neq \emptyset. \quad (1)$$

$$\Rightarrow 0 \in \mathcal{N}(B) \subseteq A$$

$\forall a, b \in R, \forall ab \in M(B) ; \quad d(B) \subseteq B ??$
 $\alpha a + B b$

$$a \alpha + \beta b$$

$$\forall y \in B: d_{a+B}^{\alpha}(y) = [a, a+B, y]$$

$$= [\alpha a, y] + [\beta b, y] = \underbrace{\alpha[a, y]}_{\in B} + \underbrace{\beta[b, y]}_{\in B} \in B$$

۴۸ در صورتی که



وہ اس کے ان $\alpha + Bb$ $N(B)$ کی ان $N(B)$ میں اور ان کے

$$\forall a, b \in N(B) \quad , [a, b] \in N(B)$$

22

$$\forall y \in B: d_{[a,b]}(y) = [[a,b], y]$$

لدينا

$$[y, [a,b]] + [[a,b], y] + [b, [y,a]] = 0$$

$$[[a,b], y] = [a, [b, y]] + [b, [y, a]]$$

$$+ \because d_{[a,b]}(y) = [[a,b], y] = \underbrace{[a, d_b(y)]}_{\in B} - \underbrace{[b, d_a(y)]}_{\in B}$$

$$= d_a(d_b(y)) - d_b(d_a(y)) \in B$$

$$[a,b] \in N(B)$$

مما سبق نرى ان $N(B)$ حيز لي جزئي في A

تعريف: ليكن A حيز لي فوق حلقته R ولنفرض ان

B حيز لي جزئي في A ليحوي 0 و 1 ما حسب الترتيب الاعلى

$$N(B) = \{a \in A : d_a(B) \subseteq B\}$$

حيز لي جزئي في A يحوي حيز لي الجزئي $N(B)$ فان

$$A \subseteq B$$

تعريف: ليكن A حيز لي فوق الحلقة R و I مجموعة جزئية
وحيدة خالية في A

نقول ان I خالية في A اذا حققت الشروط

1- I صورة لجزئي في A

2- $\forall a \in A, d_a(I) \subseteq I$

$\forall a \in A, \forall x \in I, [a, x] \in I$

* **مبرهن هارت**: لكي A هي مجموعة الحلقية R ان مجموعته
 تطبيقات الاشتقاق الداخلي المبررته على A هي $\text{Inn}(A)$ و هي
 تشكل مثلاً ذاتي في $\text{Der}(A)$ **مبرهن**.

البرهان:

• واضح ان $\text{Der}(A) \subseteq \text{Inn}(A) \neq \emptyset$
 • لمبرهنه على ان $\text{Inn}(A)$ هو زمرة جزئية في $\text{Der}(A)$
 $\forall \alpha, \beta \in R$ و $\forall d_a, d_b \in \text{Inn}(A)$ و $a, b \in A$
 $\alpha d_a + \beta d_b \in \text{Inn}(A)$ و لمبرهنه ان:

$$\alpha d_a + \beta d_b \in \text{Der}(A) \quad \text{مدرجه اشتقاق}$$

$$\forall x \in A : (\alpha d_a + \beta d_b)(x)$$

$$= (\alpha d_a)(x) + (\beta d_b)(x) = \alpha d_a(x) + \beta d_b(x)$$

$$= d_a(\alpha x) + d_b(\beta x) = \alpha [d_a(x)] + \beta [d_b(x)]$$

$$= \alpha [d_a(x)] + \beta [d_b(x)] = [\alpha a + \beta b, x] = d_{\alpha a + \beta b}(x)$$

$$(\alpha d_a + \beta d_b) = d_{\alpha a + \beta b}$$

$\text{Der}(A)$ هو زمرة جزئية في $\text{Inn}(A)$.

$\forall D \in \text{Der}(A)$ و $d_a \in \text{Inn}(A)$ و $a \in A$

$$[D, d_a] = ?$$

ال. $[D, d_a] \in \text{Der}(A)$

$$\forall x \in A : [D, d_a](x) = (D d_a - d_a D)(x)$$

$$= (D d_a)(x) - (d_a D)(x) = D(d_a(x)) - d_a(D(x))$$

$$\begin{aligned}
 D([ax]) - d_a(Dx) &= [D(ax)] + [a, Dx] - d_a(Dx) \\
 &= [D(ax)] + d_a(Dx - d_a(Dx)) = [D(ax)] = d_{D(a)}(x)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d[D, da] = d_{D(a)} \in \text{Inn}(A)$$

هذا سيثبت أن $\text{Inn}(A)$ متماثل لـ $\text{Der } A$

في الختام

OSCAR